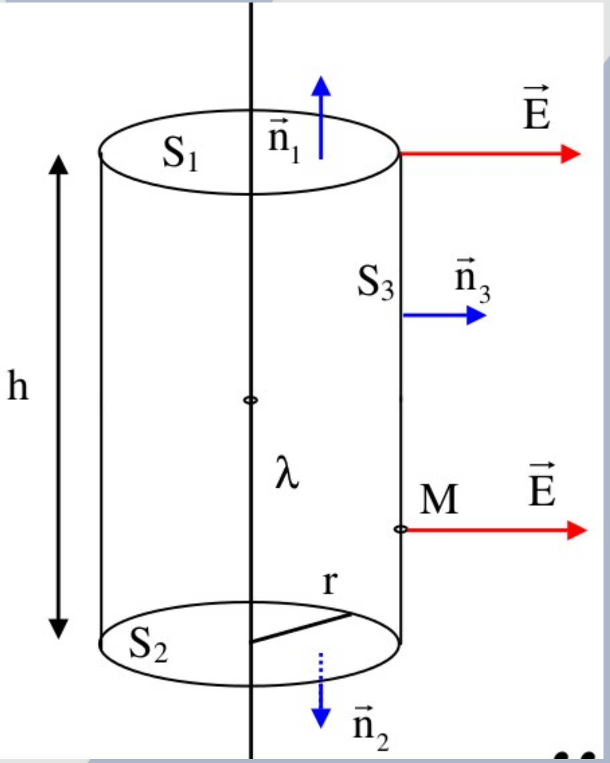
Électromagnétisme

Chapitre 3 – Théorème de superposition et symétries



Physique - 2022-2023

Présentation rédigée par Émilie Dupont (Cergy) : emilie.dupont@cyu.fr, CY308

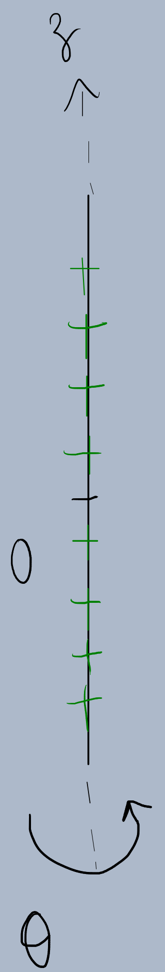
Programme d'électrostatique

- Chapitre 1 – Force entre deux charges
- Chapitre 2 – Champ électrostatique
- **Chapitre 3 – Théorème de superposition et symétries**
- Chapitre 4 – Théorème de Gauss
- Chapitre 5 – Potentiel électrostatique
- Chapitre 6 – Conducteurs en équilibre électrostatique

1.3 Théorème de superposition et symétries

1.3.1 Invariances d'une distribution

[7]



Invariance par translation

Si $\rho(\vec{r})$ est invariante dans toute translation parallèle à un axe Oz, alors $\vec{E}$ ne dépend pas de z $\vec{E}(r,\theta,\cancel{z})$

Invariance par rotation / symétrie axiale

Si $\rho(\vec{r})$ est invariante dans toute rotation autour d'un axe Oz, alors $\rho(\vec{r})$ présente une symétrie axiale.

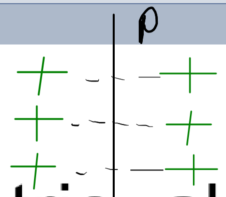
Il convient alors d'utiliser les coordonnées cylindriques. Dans ce cas, $\vec{E}(r,\theta,z)$ ne dépend pas de θ. $\vec{E}(r,\cancel{\theta},z)$

Symétrie cylindrique

Si $\rho(\vec{r})$ est invariante par toute translation parallèle à un axe Oz et toute rotation autour d'un axe Oz, alors $\rho(\vec{r})$ présente une symétrie cylindrique.

Dans ce cas, $\vec{E}(r,\cancel{\theta},\cancel{z})$ ne dépend que de r.

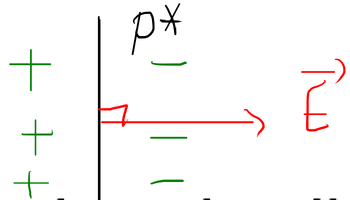
Plan de symétrie P



2 plans de sym. ⇒ direction de $\vec{E}$

Si $\rho(\vec{r})$ admet un plan de symétrie, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan. $\vec{E} \in P$

Plan de d'anti-symétrie



Si par symétrie par rapport à un plan, la distribution $\rho(\vec{r})$ est transformée en $-\rho(\vec{r})$, c.a.d. qu'à une distribution de charge (+) (resp. (–)) correspond une charge (–) (resp. (+)), alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan $\vec{E} \perp P^*$

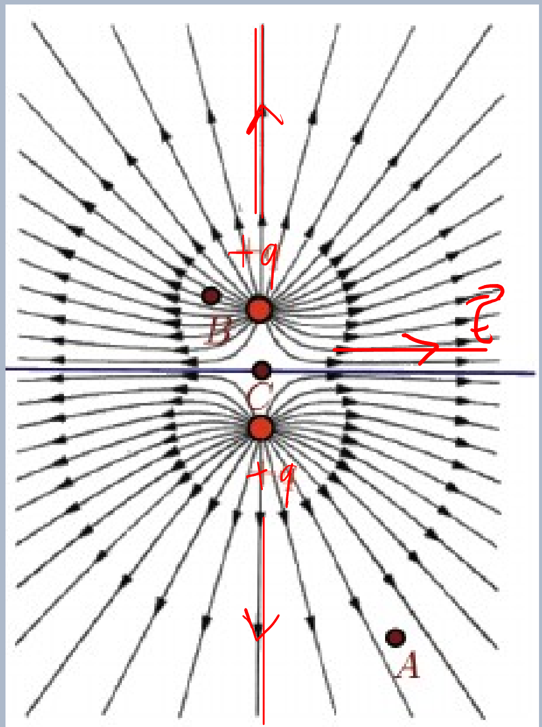
1 plan d'antisym ⇒ direction de $\vec{E}$

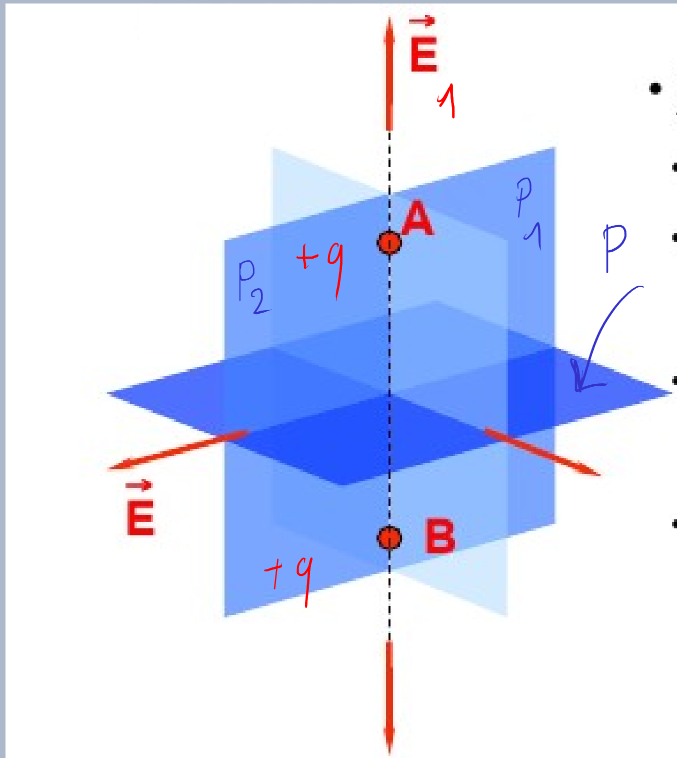
1.3.2 Direction de **E** en un point d'un plan de symétrie ou d'antisymétrie - Exemples

[7]

symétries $\Rightarrow$ direction de $\vec{E}$

$\vec{E}_1$





- 2 charges identiques : $+q$
  - pas de symétrie de translation
  - symétrie miroir par tout plan passant par la droite (AB) P
  - symétrie miroir par le plan médiateur au segment [AB] P_1, P_2
  - symétrie de rotation autour de (AB)

$\vec{E} \in P$ et $\vec{E} \in P_1$ et P_2

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ direction commune des 3 plans

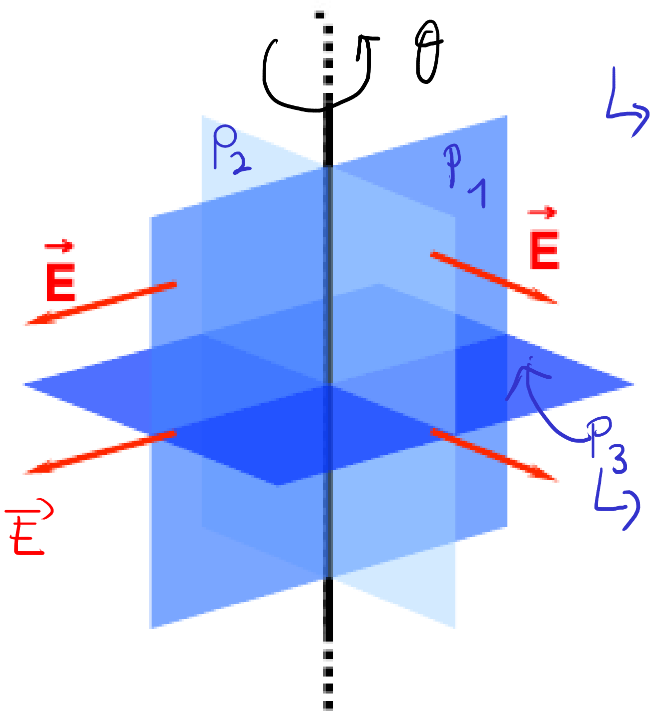
1.3 Théorème de superposition et symétries

1.3.2 Direction de **E** en un point d'un plan de symétrie ou d'antisymétrie - Exemples

[7]

Coord. cylindriques :

$\vec{E}(r,\theta,z)$



fil infini chargé :

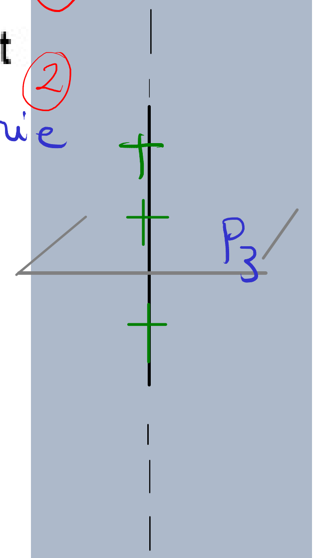
↳ • symétrie de translation le long du fil (1)

• symétrie miroir par tout plan passant par le fil (2) P_1, P_2 plan de symétrie

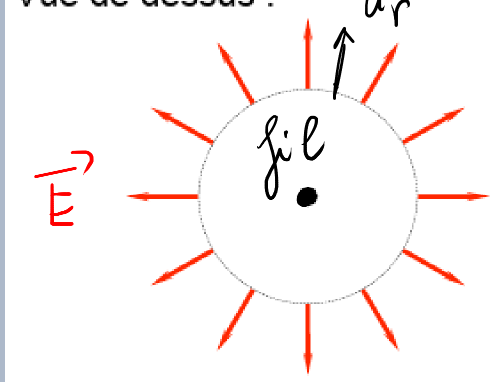
• symétrie miroir par tout plan (3) perpendiculaire au fil P_3 plan de sym.

↳ • symétrie de rotation autour de l'axe passant par le fil (4)

⇒ symétrie axiale



Vue de dessus :



• invariances : invariance par translation selon Oz

↳ (1) $\vec{E}(r,\theta,\cancel{z})$ $\Rightarrow$ $\vec{E}(r)$

invariance par rotation

↳ (4) $\vec{E}(r\ \cancel{\theta}\ z)$

1.3 Théorème de superposition et symétries

1.3.2 Direction de **E** en un point d'un plan de symétrie ou d'antisymétrie

• symétries : $\vec{E} \in P_1$ et P_2 ②

$\vec{E} \in P_3$ ③ $\Rightarrow$ $\vec{E}$ selon $\vec{u}_r$

$$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r}$$

+ Théorème de Gauss (chap. 4)

$\downarrow$

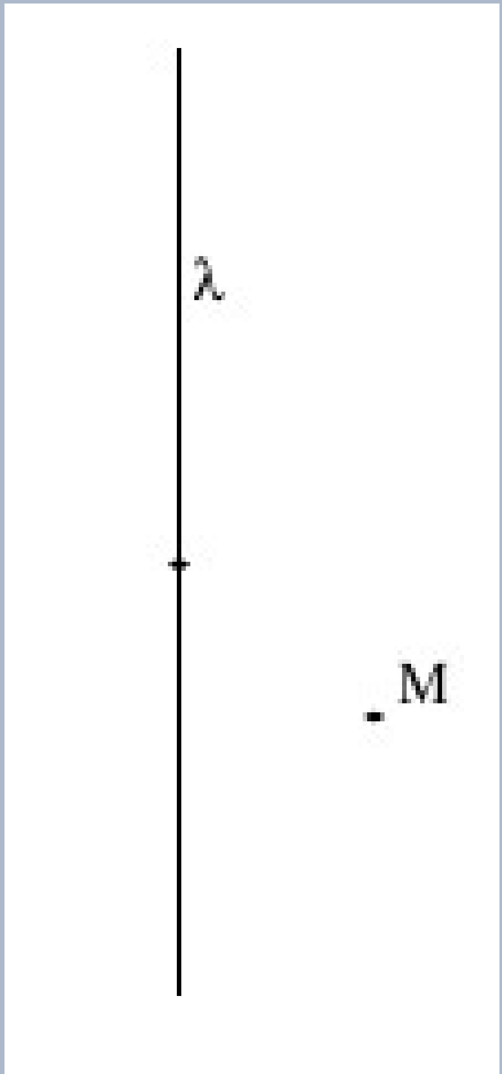
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$C\,m^{-1}$

m

1.3.3 Exemples

Champ électrostatique créé par une distribution linéique uniformément chargée



Il existe des symétries cylindriques et invariance de translation, par conséquent, le champ $\vec{E}$ en M s'exprime en coordonnées cylindriques : $\Rightarrow \vec{E}(r) = E(r).\vec{u}_r$

② et ③ P_1, P_2 et P_3 plan de symétrie

$\Rightarrow \vec{E} = E_r \vec{u}_r$

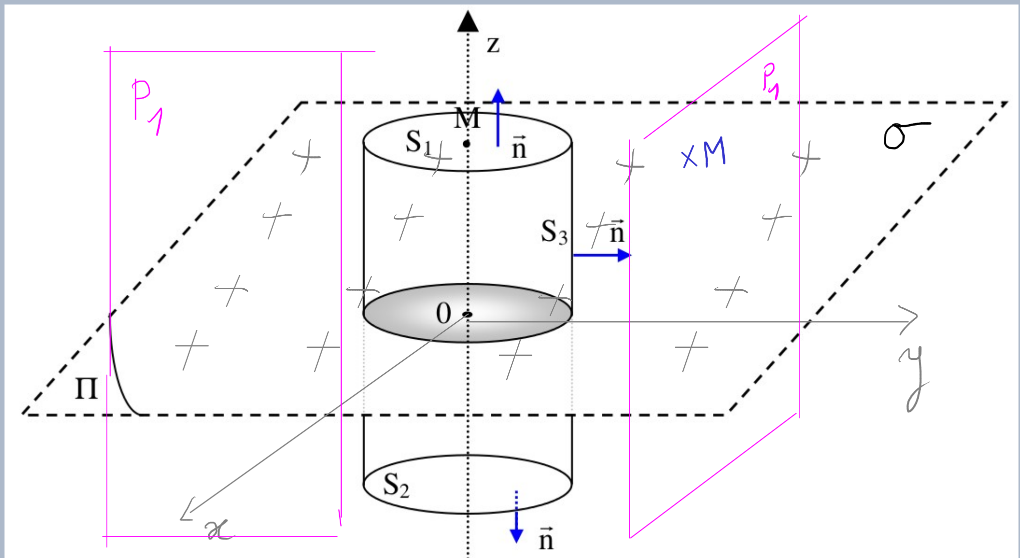
invariance : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

1.3 Théorème de superposition et symétries

1.3.3 Exemples

Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargée

plan infini Π portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface.



coord. cart. $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à Π.

⇨ $\vec{E} = E_z(x,y,z)\,\vec{k}$ au point M

Il existe une invariance par translation selon x et y : (plan ∞)

⇨ $\vec{E} = E_z(z)\,\vec{k}$ au point M

$\vec{E}(\cancel{x},\cancel{y},z)$

• $\sigma = \frac{dq}{dS} = \sigma_0$ uniforme (charges réparties uniformément)

$P_1 = (M, \vec{j}, \vec{k})$

+ plan ∞ alors ∀ plan P_1 perpendiculaire à Π $P_1 = (M, \vec{i}, \vec{k})$ $\Rightarrow \vec{E} = E(z)\,\vec{k}$

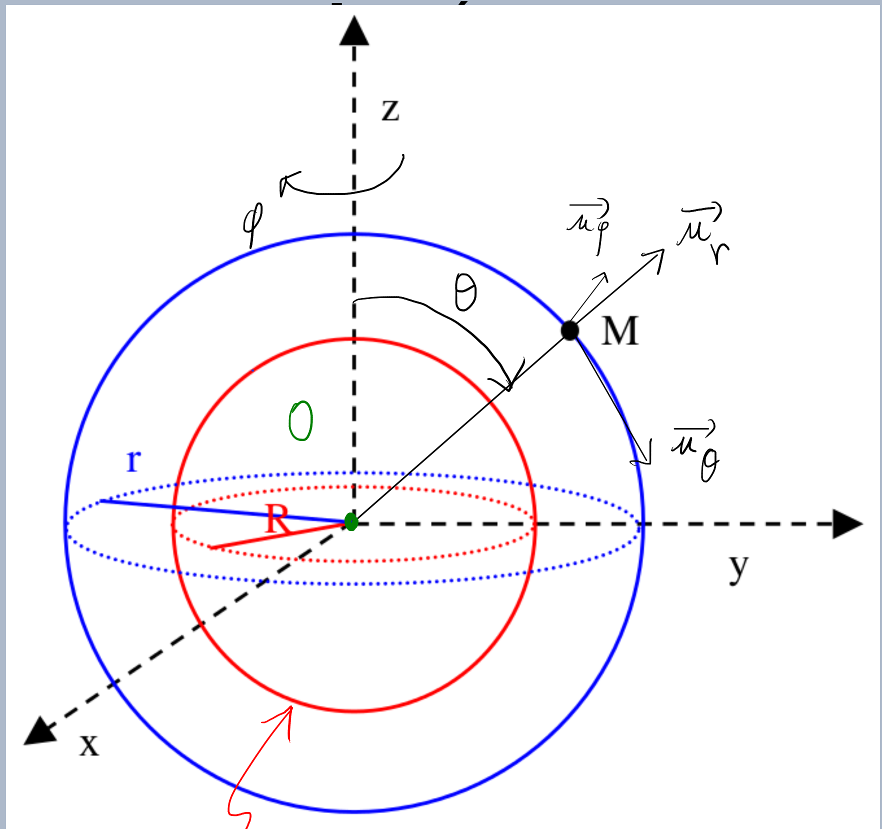
alors la répartition de charges reste la même lors d'une symétrie miroir $/P_1$

$\Rightarrow P_1 =$ plan de symétrie : $\vec{E} \in P_1 \Rightarrow \vec{E} = E_z\,\vec{k}$

1.3 Théorème de superposition et symétries

1.3.3 Exemples

Champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée



sphère chargée en volume

symétrie sphérique.

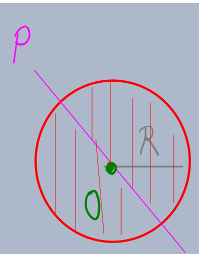
$$\vec{E}(r) = E(r).\vec{u}_r$$

- choix du système de coordonnées : $\{O, (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)\}$
- unif. chargée : invariances par rotation selon (Oz) ou (Oy) $\longrightarrow$ $\vec{E}$ indépendant de θ et φ

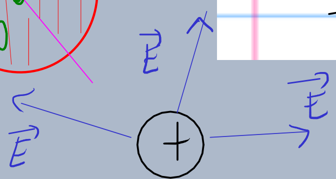
$\vec{E} = \vec{E}(r)$

- symétries : tout plan P contenant M, passant par O est plan de symétrie $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$, $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$\Longrightarrow \vec{E} \in P$; $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$



remarque : $R = 0$ charge ponctuelle



Bibliographie

- [1]Polycopié de cours
- [2] CUPGE - CY : Introduction à l'électromagnétisme
- [3] Wikipédia
- [4] Encyclopédie Universalis
- [5] David Sénéchal - « Histoire des sciences » PHQ399 Université de Sherbrooke, QC
- [6] pour la suite : Khan Academy , Unisciel etc.
- [7] Cours LP 203 - Champs électrique et magnétique de Nicolas MENGUY