Serie

CM

2022 -
2023

Serie à terme quelconque

Théorème : Une serie $\sum U_n$ est convergente ssi la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy, c à d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |S_p - S_q| < \varepsilon$$

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} U_k \qquad S_q = \sum_{k=0}^{q} U_k$$

Ce qui peut s'ecrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq \mathbb{N}, \forall q \geq N, \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| < \varepsilon$$

Corollaire : Soit $\sum u_n$ une serie numerique s'il existe deux suites $(P_n)_n$ et $(q_n)_n$ tq :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \leq q_n$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = \lim\limits_{n \to \infty} q_n = +\infty$

3) la suite $\left(\sum_{k=P_n}^{q_n} u_k\right)$ ne CV pas vers 0

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge

Exemple : Technique a appliquer dans tous les exos

$P_n = n+1$

$q_n = 2n \qquad \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$

$n+1 \leq 2n$

$$\left(\sum_{k=n+1}^{2n} u_k\right)_n \not\to 0$$

Ideé trouver un minorant strictement superieur à 0

$h(n) \leq u_k \leq g(n)$

Il faut encadrer "Théoreme des gendarmes"

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} h(n) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \to n\,h(n) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} U_k$$

Series Alternées

Théorème : (Regle d'Abel)

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites numeriques tq

- $(a_n)_n$ est une suite à termes positifs, décroissante et tend vers 0.
- La suite numérique $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_n$ est bornée

Alors $\sum_{a \in \mathbb{N}} a_n b_n$ converge

Exemple : Étudier la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(n)}{n}$ et de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(n)}{n^2}$

mettre à termes positif

- $0 \leq \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

La serie $\sum \frac{1}{n^2}$ cv (Rieman $\alpha = 2 > 1$)

Théorème de majoration des series à termes positifs

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \text{ CV}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2} \text{ CV absolument}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2} \text{ CV}$$

On applique la regle d'Abel pour la Serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n}$

$a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1$

$b_n = \cos(n)$

$\left(\frac{1}{n}\right)_n$ est $\searrow$ et $\to 0$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \cos(k) \right| \leq ?$$

$$\cos(n) = \mathrm{Re}(e^{in})$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{i})^k\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i}}\right)$$

$$\left|\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i}}\right| \leq \frac{1 + |e^{i(n+1)}|}{|1 - e^{i}|} = \frac{1+1}{|1 - e^{i}|}$$

$$1 - e^{i} = e^{i0} - e^{i}$$

$$= e^{i\frac{(a+b)}{2}}\left(e^{i\frac{(a-b)}{2}} - e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$$

$$= 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$= |2i \sin(-1/2)\, e^{i/2}$$

$$= 2\sin(1/2)$$

$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$
$= 2i\sin(\alpha)$

donc : $\dfrac{2}{2\sin(1/2)} = \dfrac{1}{\sin(1/2)}$ donc bornée d'où $\left|\dfrac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right| \leq \dfrac{2}{2\sin(1/2)} = \dfrac{1}{\sin(1/2)}$

$$\left|\sum_{k=0} \cos(k)\right| = \left|\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)\right| \leq \frac{1}{\sin(1/2)}$$

Donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} bk\right)$ est bornée

On applique la Regle d'Abel, on a la convergence de

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n)}{n}$$

Def: Une serie Numériques réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite alternée, ssi,

$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = (-1)^n |u_n|$ ou

$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = -(-1)^n |u_n|$

Remarque : 1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est une serie alternée

SSi $u_n \cdot u_{n+1} \leq 0$

2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une serie alternée

ssi $u_n = (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_n$

une suite à termes constant

Exemple : 1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$

2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{n}}$ $\quad \cos(n\pi) = (-1)^n$

3) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{\ln(n)}$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Théorème : (Th spécial des séries alternées) " TSCSA"

Soit $\sum_{n} u_n$ une série alternée telle que $(|u_n|_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit une suite réelle (positive) décroissante et tend vers 0

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge. De plus $\forall n \geq n_0$, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$

Exercice :

On considère $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad , \quad v_n = \ln\left(\cos\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad , \quad v_n = \ln\left(1 + \sin\left(\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

1) Montrer que $u_n \sim v_n$

2) Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

3) Que peut-on conclure.

1) $\ln\left(1+\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$X \to 0$ $\quad X \quad Y \to 0 \quad Y$

2) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n}} = a_n$ de signe constant

$\sum u_n$ est une serie alternée

- $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite decroissante

d'après le TSCSA $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ CV

⚠ $u_n \sim v_n$ mais les suites ne sont pas de signes constant on ne peut pas appliquer le Théorème des equivalents des séries à termes constants.

$$v_n = \ln\left(1 + \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\right)\right)$$

$$= \ln(1 + X)$$

$$= X - \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$

$$= \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)^3 + o\left(\left(\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^3\right)$$

Si (u_n) et (v_n) ne gardent pas un signe constant

$$u_n = o(v_n)$$

avec $\sum v_n$ CV

$$\not\Downarrow$$

$\sum u_n$ CV

⚠ $\sum o(V_n)$

$\sum |V_n|$ (cv Riemann $p>1$)

$$V_n = \ln\left(1+\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= \ln(1+x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$x = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\right)$$

$$V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{2n}}_{b_n} + \underbrace{\frac{1}{6}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}}_{c_n} + \underbrace{o\left(\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\right)}_{d_n}$$

$\sum_n a_n$ converge (serie alternée TSCSA)

$\sum_n b_n$ diverge (Rieman $\alpha = 1$)

$\sum_n c_n$ converge $\nearrow$ CV absolument
$\searrow$ TSCSA

$\sum_n d_n$ converge $\rightarrow$ CV absolument

Donc $\sum_n u_n$ diverge

3) On a deux suites equivalentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ Mais $\sum u_n$ et $\sum v_n$ n'ont pas la même nature de convergence car on a pas des series à termes constants.

Somme de produis

$\rightarrow$ théorème : Si les series $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la serie $\sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{0}^{+\infty} a_j b_{n-j}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{n \geq 0} b_n$

avec $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$

Chapitre : Suites et series de fonction

I. Suites de fonctions

1/ Convergence simple et convergence uniforme

Def. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f, f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ des fcts, $(\forall n \in \mathbb{N})$

i) On dit que la suite de fcts (f^n) converge simplement vers f sur A

$\left(f_n \xrightarrow[A]{cvs} f\right)$

Si $\forall x \in A$ la suite numerique $(f(x))_n$ converge vers $f(x)$

ii) On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement (CVS) sur A s'il existe une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ tq : $f_n \longrightarrow f$ simplement

Quantification :

$$\left(f_x \xrightarrow[A]{cvs} f\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists x \;(= n_0(x)), \forall n \geqslant n_0(x), \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right)$$

Exemples: 1

$\forall n \in \mathbb{N}$; $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^n - x$$

Etudions la convergence simple de la suite de fct $(f_n)_n$

pour $x=1$: $f_n(x) = f_n(1) = 1^n - 1 = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

pour $x \in [0,1[$: $f_n(x) = x^n - x \xrightarrow[n \to +\infty]{} -x$

Conclusion : $f_n \xrightarrow[[0,1]]{\text{CVS}} f : x \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ -x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$

(2) $g_x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \dfrac{x^n}{1+x}$

. si $x = 1$

$g_n(x) = g_n(1) = \dfrac{1}{2}$

. $x \in [0,1[$

$g_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

. $x > 1$. $x^n \longrightarrow +\infty \notin \mathbb{R}$

Conclusion : $(f_n)_n$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}_+$

$f \xrightarrow[[0,1]]{\text{CVS}} f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1/2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Rappel :

$\|f\|_\infty = \sup |f_n(x)|$

$\|f\|_\infty \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$\big| \|f\|_\infty - \|g\|_\infty \big| \leq \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Def : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f, f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions et

soit $b_n = \|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$

i) On dit que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f sur A, si $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$ (c-à-d $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$)

Notation :

$f_n \xrightarrow[A]{CVU} f$

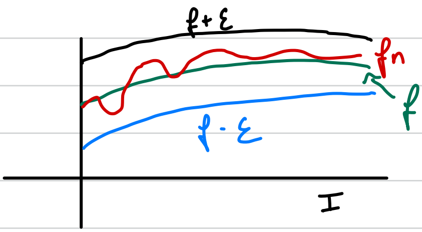
ii) On dit que $(f_n)_n$ CVU sur A s'il existe une fonction f définie sur A

tq : $f_n \xrightarrow[A]{CVU} f$

Quantification :

$$\left(f \xrightarrow[A]{CVU} f\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in A ; \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right)$$

(Rq : n_0 ne depend pas de x)



pour $f, f_n : I \to \mathbb{R}$,

$f_n \xrightarrow[I]{CVU} f$ veut dire que pour tout $n \geq N_0$, le graphique de f_n se trouve dans le tube

Proposition: La convergence uniforme implique la convergence simple

$$\left[(f_n)_n \xrightarrow[A]{CVU} f\right] \Rightarrow \left[(f_n)_n \xrightarrow[A]{CVS} f\right]$$

$$\not\Leftarrow$$

⚠ La reciproque n'est pas toujours vraie

Preuve :

On a : $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$, c à d $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

car $\forall x \in A, 0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$

Etudier le sup c'est etudier la convergence uniforme

Rq : si $(f_n)_n$ ne converge pas simplement alors $(f_n)_n$

Exemple :

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^n \longrightarrow |x| < 1 \to x^n \longrightarrow 0$

$(f_n)_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Etudions la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[0,1]$

$h_n(x) = \begin{cases} x^n - 0 & \text{si } x [0,1[\\ 1 - 1 = 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$h_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Methode 1 :

$x_0 = 1 - \frac{1}{n}$

$(f_n - f)(x_0) = x_0^n = (1 - 1/n)^n = e^{n \ln(1 - 1/n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1} \neq 0$

Puisque $\| f_n - f \|_\infty \geqslant | f_n(x_0) - f(x_0) |$

alors $\lim\limits_{n \to \infty} \| f_n - f \|_\infty \geqslant \lim\limits_{n \to +\infty} | f_1(x_0) - f(x_0) | = e^{-1}$

$\Rightarrow \| f_n - f \|_\infty \not\to 0$

d'où $(f_n) \xrightarrow[{[0,1]}]{CVU} f$

le pb est en 1 sauf que 1 $\notin$ notre intervalle c pour ça on fait 1/e

Methode 2 : Soit $x \in [0,1[$

$h_n(x) = f_n(x) - f(x)$

$= x^n$

$h'_n(x) = n x^{n-1} \geqslant 0$

x	0		1
v. h_n	0	$\nearrow$	1

$\| h_n \|_\infty = 1 \not\to 0$

d'où $(f_n) \xrightarrow[{[0,1]}]{CVU} f$

$\left(h_n(1) = 0 \text{ , donc } \sup_{x\in[0,1[} |h_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)| \right)$

Montrer que : $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$, $\forall a \in [0,1[$

On a : $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} |h_n(x)| = h_n(a)$

$$= a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $(f_n)_n \xrightarrow[{[0,a]}]{CVU} f$

Def: si $(f_n)_n \xrightarrow[A]{CVU} f$, $\forall a \in [0,1[$ (resp $a \in [0,+\infty[$)

on dit que $(f_n)_n$ converge localement uniformément sur $[0,1[$
(resp sur $[0,+\infty[$)

Theoreme : (Critère de Cauchy pour la CVU)

Une suite $(f_n)_n$ de fcts de A dans $\mathbb{R}$ converge uniformément sur A,

ssi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \geq n_0, \forall m, n_0 ; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Notation:

$$\| f_n - f_m \|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Etude de la CVU de $(f_n)_n$ sur I

1 / Etudier la CVS sur I

$\longrightarrow$ Si $(f_n)_n \not\xrightarrow[I]{CVS} f$ alors $(f_n)_n \not\xrightarrow[I]{CVU} f$

$\longrightarrow$ Si il existe $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $(f_n)_n \xrightarrow[I]{CVS} f$

Pour montrer la non CVU de $(f_n)_n$ vers (f)

- on cherche un $x_0 \in I$ (choisir une suite) tq $|f_n(x_0) - f(x_0)| \not\to 0$
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et f n'est pas continue sur I alors $(f_n) \not\xrightarrow[I]{CVU} f$
- Etudier la fct $h_n = |f_n - f|$ et chercher le $\sup\limits_{x \in I} |h_n(x)|$

Pour montrer la CVU de $(f_n)_n$ vers (f) il faut etudier la fct $h_n = |f_n - f|$

et montrer que $\sup\limits_{x \in I} |h_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Proposition:

Soient $f_n, g_n \; I \longrightarrow \mathbb{R}$

Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ CVU sur I

alors $(f_n + g_n)$ CVU sur I

Preuve : Soit f la limite de la suite de fonction $(f_n)_n$
Soit g la limite de la suite de fonction $(g_n)_n$

$$\left((f_n + g_n)_n \xrightarrow[I]{CVU} f + g \right) \text{ ssi } \| (f_n + g_n) - (f+g) \| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On a : $\| f_n + g_n - f - g \|_\infty \leq \underbrace{\| f_n - f \|_\infty}_{\substack{n \to +\infty \\ \downarrow \\ 0}} + \underbrace{\| g_n - g \|_\infty}_{\substack{n \to +\infty \\ \downarrow \\ 0}}$

d'où le résultat

Exemple : $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Etudions la CVU de $(f_n)_n$, puis de $\underbrace{(f_n^2)_n}_{= (f_n \times f_n)_n}$, puis de $\left(\frac{f_n}{n}\right)_n$

* CVS de $(f_n)_n$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = x$,

$$(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVS} f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x \end{array}$$

* CVU de $(f_n)_n$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| x + \frac{1}{n} - x \right| = \frac{1}{n}$$ (ne dépend pas de x)

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f$

b] Etude de la suite de fonction (f_n^2) sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_n^2(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(f_n(x)\right)^2 = x^2$$

$$(f_n)^2 \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVS} f^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 = \left(f(x)\right)^2$$

Etudions la CVU de $(f_n)_n^2$ vers f^2 sur $\mathbb{R}$

$$\left| \left(f_n(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 \right| = \left| x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2 \right| = \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right|$$

pour $x_0 = n$, on a :

$$\left| \left(f_n(x_0)\right)^2 - \left(f(x_0)\right) \right|^2 = \left| 2 + \frac{1}{n^2} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2 \neq 0$$

or $\| f_n^2 - f^2 \|_\infty \not\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Par suite

$$\left(f_n\right)^2 \overset{CVU}{\underset{\mathbb{R}}{\not\longrightarrow}} f^2$$

c) Etude de la fonction $\left(g_n = \frac{f_n}{n} \right)_n$

* CVS de $(g_n)_n$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{1}{n}\left(x + \frac{1}{n} \right) = \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$

Pour $x = 0$

$g_n(0) = 0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$x \neq 0$

$g_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} g(x) = 0$

$$(g_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVS} g = 0$$

* CVU de $(g_n)_n$ sur $\mathbb{R}$

$$\left| g_n(x) - g(x) \right| = \left| \frac{x}{n} + \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{x}{n} + \frac{1}{n} \right|$$

Pour $x_0 = x$, on a :

$$\left| g_n(x_0) - g(x_0) \right| = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \neq 0$$

d'où $\|g_n - g\|_\infty \not\to 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{f_n}{n} \right) \underset{\mathbb{R}}{\overset{CVU}{\not\longrightarrow}} g = 0$$

Remarque : $g_n(x) = f_n(x) \times h_n(x)$ avec $h_n(x) = \frac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$

$$(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} h = 0$$

On a : $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f$ mais $(f_n)_n \times (f_n)_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{CVU}{\not\longrightarrow}} f \times f$

On a uniquement la CVS

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f \\ (h_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} h \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} (h_n \times f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVS} f \times h \\ (h_n \times f_n)_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{CVU ?}{\not\longrightarrow}} f \times h \end{array}$$

Proposition: Soit $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en a

Supposons que $(f_n)_n \xrightarrow[I]{CVU} f$

Alors f est une fonction continue en a.

Corollaire: une limite uniforme d'une suite de fonction continue sur I est une fonction continue sur I

Remarque: le resultat est utile pour montrer la non convergence uniforme lorsque la fonction limite n'est pas continue

Proposition: Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction continue converge uniformement sur I vers f

(fonction definie sur I). Alors pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers $x \in I$

On a:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x)$$

Preuve:

Mq. $\lim_{n \to \infty} |f_n(x_n) - f(x)| = 0$

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$ on va utiliser l'inégalité triangulaire

$$|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$

$\forall x \in I$

$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$

$$\leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

$$\leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + \|f_n - f\|_\infty$$

or : $(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in I$

et f_n une fonction continue sur I

$\Rightarrow \lim f_n(x_n) - f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x_n) - f(x)| = 0$

Remarque : la CVU de $(f_n)_n$ est une condition necessaire dans la proposition

Exemple : $f_n(x) = x^n$, $x \in [0;1]$

On a : $f_n \xrightarrow[[0;1]]{CVS} f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0;1[\end{cases}$$

On a aussi $(f_n)_n \xrightarrow[[0;1]]{CVU} f$

prenons $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \neq 0$

$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

On a $f(1) = 1$ mais $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n)$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$= e^{-1}$

On a : $f(1) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n)$

$\lim\limits_{n \to \infty} f_n\left(\lim\limits_{n \to \infty}(x_n)\right)$

Interversion des limites :

d'après l'exemple, lorsque $(f_n)_n$ ne CVU pas vers f

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \to \infty} \lim_{n \to 1} f_n(x)$$

Théorème : Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Supposons que $(f_n)_n$ CVU vers f sur I et que $\ell_n = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe (on a une limite)

Alors $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{x \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$ $\boxed{\text{Important}}$

Integrales et convergence uniforme

Théorème   Valable que pour un interval borné.

1] Soit $a < b$. Si une suite $f: [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de fonctions integrables et convergent uniformement vers une fonction f, alors f est integrales et on a :

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f(x)\,dx$$

2] Il existe des suites de fonctions integrables $(f_n)_n$ qui convergent simplement vers une fonction non integrable, mais

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx$$

Preuve :

1/

Regarder cours Teams ennegistré.

2/

3/ Exercice :

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq (2n)^{-1} = \frac{1}{2n} \\ 4n(1-nx) & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq n^{-1} = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Corollaire : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Théorème : Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $(f_n)_n \in \mathcal{C}^1(I)$.

Supposons que : i) $(f_n)_n$ CVS sur I vers f

ii) $(f'_n)_n$ CVU sur I vers g

Alors : $f \in \mathcal{C}^1(I)$ et $f' = g$

c'est-à-dire

$$\left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \to \infty} f'_n(x)$$

Exemple :

$$f_n(x) = n^2 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \quad 0 \leq x \leq 1$$

1/ Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0;1]$

2/ Montrer que $(f'_n)_n$ converge uniformement sur $[0;1]$

3/ Montrer que $f = \lim\limits_{n \to \infty} f(x)$ est derivable sur $[0;1]$

Serie de fonction

II - Continuité en un point d'une Serie $\sum f_n$ uniformement convergente

1) Continuité : Th 1) Soit $\sum f_n$ une serie de fonction uniformement convergente sur A. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue en $x_0 \in A$ (respect sur A) alors la somme (= lim) S de $\sum f_n$ est continue en x_0 (respect sur A)

Preuve : voir le Th sur les suites de fonctions et considerer $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = f_1 + \dots + f_n$, qui est donc unif convergente

On a : $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum\limits_{x=0}^{+\infty} \left(\lim f_n(x) \right) = \sum\limits_{x=0}^{+\infty} f_n(x_0)$

Intervertir => continuité uniforme et .....

2) limite en un point : Th 2) Soit $\sum f_n$ une serie de fonctions uniformement convergente sur A et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_n$ (existe) pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors
↳ ℓ indixe par n (lim)

$\sum \ell_n$ convergente et on a $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$

III - Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Th : Soit $\sum f_n$ une serie de fonctions continues sur $[a, b]$

. Si $\sum f_n$ converge uniformement sur $[a,b]$ alors $\sum \left(\int_a^b f(x)dx \right)$ est convergente et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx$

Preuve : voir le Th. d'intégration de la limite uniforme des suites de fonctions

Exemple d'application : Soit $\sum f_n$ où $f_n(x) = (-1)^n x^n$

Convergence simple : On étudie la série numérique $\sum U_n$ où $U_n = f_n(x) = (-1)^n x^n$

$\sum U_n = \sum (-1)^n x^n = \sum (-x)^n$ série géométrique qui converge ssi $|x| < 1$ c-a-d $-1 < x < 1$

$\sum f_n$ converge simplement sur $]-1;1[$ vers S où $S :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto S(x) = \frac{1}{1+x}$

Convergence normale. on étudie la série numérique $\|f_n\|_\infty$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in]-1,1[} |f_n(x)| = \sup_{x \in]-1,1[} (|x|^n) = 1$$ $\Rightarrow \sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]-1;1[$

Convergence uniforme : $\sum f_n$ Converge uniformément sur A ssi $\sup_{x \in A} |R_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Série alternée c'est bien pour CV. unif car on peut majorer.

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{n+k}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{n+k} x^{n+k} = (-x)^n \sum_{k=1}^{+\infty} (-x)^k = (-x)^n \cdot \frac{-x}{1+x} = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$x \in]-1;1[$

$$\sup_{x \in]-1,1[} |R_n(x)| = \sup_{x \in]-1,1[} \left(\frac{|x|^{n+1}}{1+x}\right) = +\infty$$

$\Rightarrow \sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1;1[$ Soit $[a,b] \subset]-1;1[$

pour $x \in [a,b]$ $\dfrac{|x|^{n+1}}{1+x} \leq \dfrac{|x|}{1+a} \leq \dfrac{\max(|a|^{n+1}, |b|^{n+1})}{1+a}$

$\Rightarrow \sum f_n$ converge uniformement sur tout segment $[a,b] \subset]-1;1[$

Appliquons le Th d'integration terme à terme :

Choisissons $[a,b] = [0,t]$ avec $0 < t < 1$

alors on sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t f_n(x)\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^t$

$= \ln(1+t)$

$$\| $$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t (-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^t$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t}{n+1}$$

donc on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, t^{n+1}}{n+1} = \ln(1+t)$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = \ln(1+t)$ pour $t \in]0,1[$

On peut aussi avoir

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = \ln(1+t)$ pour $t \in]-1,1[$

IV - Derivation terme à terme

Th : Soit $\sum f_n$ une serie de fonction de classe C^1 sur I (intervalle de $\mathbb{R}$)

Si a) $\exists$ au moins $x_0 \in I$ tq $\sum f_n(x_0)$ converge vers ℓ une constante réelle

b) la serie de fonctions $\sum f_n$ converge uniformement sur tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset I$ vers une fonction G.

alors 1 - $\sum f_n$ converge uniformément sur tout $[a,b] \subset I$ vers une fonction $S : x \longmapsto \ell + \int_{x_0}^{x} G(t)\, dt$

2 - la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I et on a $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$

Serie entière

I- Définition

Une serie entière peut-être entière (respectivement réelle) est une serie de fonction $\sum f_n$ pour laquelle $\exists$ une suite complexe (respectivement réelle) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq chaque f_n est definie $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (respectivement $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_n$, $x \mapsto a_n x^n$)

une telle serie sera notée $\sum a_n z^n$ (respectivement $\sum a_n x^n$)

II- Rayon et domaine de convergence

Soit une serie entière complexe ou réelle l'ensemble $I = \{ r \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \sum |a_n| r^n \text{ converge} \}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0. La borne superieur de I est appelée le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$

Definition Domaine de convergence.

Soit $\sum a_n z^n$ une serie entière complexe (respectivement réelle) de rayon de convergence $r \in \mathbb{R}_+$, le domaine de convergence de

- $\sum a_n z^n$ est $D_r = \{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < r \}$

- $\sum a_n x^n$ est $D_r =]-r ; r[$

Exemple : . Considerons $\sum a_n z^n$ ou $a_n = n^n$, on definit donc la serie entière $\sum n^n z^n$

pour chercher le rayon de convergence on cherche l'ensemble

I. on regarde la serie numerique $\sum n^n r^n$ et on cherche les valeurs de r pour lesquelles $\sum n^n r^n$ converge

$\sum n^n r^n$ est une SRP (serie réelle positive) $\sqrt[n]{n^n r^n} = nr \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ si $r > 0$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ si $r = 0$

$I = \{0\} \Rightarrow$ le rayon de convergence $r = 0 \Rightarrow$ le domaine de convergence $Dr = \emptyset$

2/ Soit $\sum a_n z^n$ ou $a_n = \frac{1}{n!}$

On etudie $\sum |a_n| r^n = \sum \frac{1}{n!} r^n$ c'est une SRP

On applique D'Alembert d'où $\frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{r^n} = \frac{r}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

donc $I = [0; +\infty[$

Le rayon de convergence $r = +\infty$ et le domaine de convergence

- $\sum a_n z^n$ complexe alors $Dr = \{z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < +\infty\} = \mathbb{C}$
- $\sum a_n x^n$ réelle alors $Dr =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

une serie entière sous la forme $\sum a_n z^n$ s'écrit

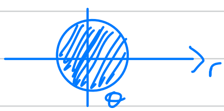
$$\sum a_n x^n \text{ ou } \sum a_n z^n$$

On a definie $I = \{ r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \sum |a_n| r^n \text{ converge} \} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

La borne supérieur I est le $\underbrace{\text{rayon de convergence}}_{\substack{\text{forcement } \mathbb{R}_+ \\ = 0 \text{ possible aussi } = +\infty}}$ $\sum a_n x^n$

- Pour une serie entiere réelle le domaine de convergence aussi appelé intervalle ouvert de convergence est $]-R, R[$

- Pour une serie entiere complexe le domaine de convergence
  $D = \{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R \}$ = boule ouverte de centre 0 et de rayon R



Exemple : 1) $\sum a_n z^n$ où $a_n = 1$; on a defini $\sum z^n$
Calculons $r \in \mathbb{R}_+$ tq $\sum r^n$ converge

$\sum r^n$ est une serie geometrique qui converge si $|r| < 1$
c-a-d $-1 < r < 1$ comme nous cherchons $r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow r \in [0, 1[$

d'où $I = [0, 1[$

le rayon de convergence de $\sum z^n$ vaut $R = 1$

- Si $\sum z^n$ une serie entière réelle alors le domaine de convergence est $]-1;1[$

- Si $\sum z^n$ une serie entière complexe alors le domaine de convergence est la boule ouverte unité.

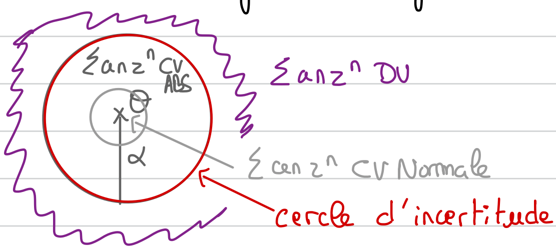
Lemme d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une serie entière complexe. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tq la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0|$ la serie $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et de plus la serie entière $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon r avec $r < |z_0|$

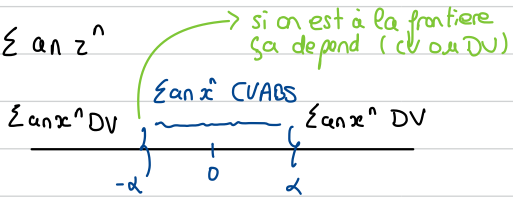
Remarque : à toute série complexe $\sum a_n z^n$ est associée un unique réel $\alpha \in \overline{\mathbb{R}_+}$

$\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

tq $\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < \alpha, \text{ la serie entière } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente} \\ \forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| > \alpha, \text{ la serie entière } \sum a_n z^n \text{ est absolument divergente} \end{cases}$

Le réel α est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$





α est noté R rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

Determination pratique de rayon de convergence :

utilisation des règles de Cauchy ou de Alembert

Th: Soit $\sum a_n z^n$ une serie entière complexe tq $\exists$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} \text{ ou bien } \exists \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut $R = \frac{1}{\ell}$

Exemple: Determiner le rayon de convergence de la serie entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivant

1) $a_n = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$

2) $a_n = \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{(2n)!}}$

$(1^\infty : FI)$

1) $$\sqrt[n]{|a_n|} = \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2} \right]^{1/n} = \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2 \times \frac{1}{n}} = \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$$

$$= (1 - 1/n)^n = e^{n \ln(1 - 1/n)} = e^{n(-1/n + o(1/n))} = e^{-1 + o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1} \Rightarrow R = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

2) $$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!}{2^{n+2} \sqrt{(2n+2)!}} \cdot \frac{2^{2n} \sqrt{(2n)!}}{n!} = \frac{(n+1)}{2^2} \sqrt{\frac{(2n)!}{(2n+2)!}} = \frac{n+1}{4} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(2n+2)}_{((2n+1)}}}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{4(2n \cdot 2n)^{1/2}} = \frac{n}{4(4n^2)^{1/2}} = \frac{1}{8} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{8} \quad R = 8$$

utilisation de l'équivalent :

Th : Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 series entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b si $|a_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$

Exemple : rayon de convergence $\sum a_n z^n$ ou $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e = e^{n\ln(1+1/n)} - e = e^{n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - e$$

$$= e\, e^{-1/2n + o(1/n)} - e = e\left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] - e = \frac{-e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow a_n \sim \frac{-e}{2n} = b_n$$

on cherche le rayon de convergence $\sum b_n z^n$

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\Rightarrow R_b = 1 \Rightarrow R_a = 1$

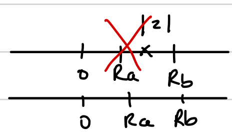
Remarque : Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 series entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b

si $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$

Preuve : soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < R_b$ alors $\sum b_n z^n$ est absolument convergente

comme $|a_n| \leq |b_n| \overset{(*)}{\Longrightarrow} \sum a_n z^n$ est absolument convergente

$\overset{(*)(*)}{\Longrightarrow} |z| < R_a$



de $(*)$ et $(*)(*)$ on déduit que $R_a \geq R_b$

Exemple : Rayon de convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{a_n} z^n$

On a $|a_n| = |\sin(n)| \leq \frac{1}{b_n}$ Soit R rayon de convergence $\sum \sin(n) z^n$

R' rayon de convergence $\sum z^n$

On sait $R' = 1$ donc $R \geq 1$

Si $z = 1$ $\sum \sin(n)$ diverge $\Rightarrow R \leq 1$

$\Rightarrow R = 1$