CC2

Électromagnétisme

08 Décembre 2022 — PréIng2

Durée : 1h30 (2h en cas de tiers temps)

Sont interdits :

- les documents ;
- tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;
- les déplacements et les échanges.

Consignes :

1. Vérifiez que le sujet est composé de 14 pages et 23 questions ;
2. Seules les dernières feuilles doivent être rendues ;
3. Les questions à rédiger, sur les dernières feuilles, sont indiquées par une icône ♣ ;
4. Remplir complètement au stylo noir la case correspondant à la bonne réponse ;
5. Complétez avec vos nom, prénom et groupe cette dernière feuille dès le début officiel de l'épreuve ;
6. Chaque question ne comporte qu'une seule réponse ;
7. Il n'y a pas de point négatif pour une mauvaise réponse ;
8. Une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.

Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (5 points)

Question 1 **(0.5 point)** La **loi de Biot et Savart** permet de calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$, pour une distribution linéique de courant où P point de la distribution de courant I. Elle s'énonce :

[A] $\overrightarrow{B}(M) = \oint\limits_{\Gamma} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^2}$

■ $\overrightarrow{B}(M) = \oint\limits_{\Gamma} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$

[C] $\overrightarrow{B}(M) = \oint\limits_{\Gamma} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{MP}}{MP^2}$

[D] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 2 **(0.5 point)** En étudiant les plans d'*anti-symétrie pour la distribution de courant*, on trouve que le vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}$ en M

[A] a pour direction celle de la droite intersection d'un plan de symétrie et d'un plan d'anti-symétrie, passant par M.

■ est inclus dans tout plan Π' d'anti-symétrie, passant par M.

[C] a pour direction celle de la droite orthogonale à un plan Π' d'anti-symétrie, passant par M.

[D] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 3 **(0.5 point)** En étudiant les plans de *symétrie pour la distribution de courant*, on trouve que la direction du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ en M est :

[A] celle de la droite intersection d'au moins deux plans de symétrie, passant par M.

[B] inclus dans tout plan Π de symétrie, passant par M.

■ celle de la droite orthogonale à un plan Π de symétrie, passant par M.

[D] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 4 **(0.5 point)** Puisque le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative, on définit la fonction potentiel électrostatique V par :

[A] $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}E$

■ $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$

[C] $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{grad}V$

[D] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 5 **(0.5 point)** Dans le cas d'une distribution volumique de charges, le potentiel électrostatique est :

[A] n'est pas défini sur les points où se trouvent les charges.

■ défini et continu en tout point de l'espace.

[C] défini sur la surface chargée et il n'est pas continu à la traversée de la surface.

[D] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 6 **(0.5 point)** Les lignes de champ de $\overrightarrow{E}$ sont :

- ■ en tout point perpendiculaires aux équipotentielles.
- B en tout point confondues aux équipotentielles.
- C en tout point perpendiculaires au champ $\overrightarrow{E}$.
- D Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 7 **(0.5 point)** L'énergie potentielle d'interaction entre une charge q et un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dérivant du potentiel V est :

- ■ $E_p = qV + K$
- B $E_p = -qV + K$
- C $E_p = qE + K$
- D Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 8 **(1 point)** Il y a une différence de potentiel de 10 V entre deux plaques distantes de 1 cm. La norme du champ électrique entre les plaques vaut :

- A 500 V/m
- B 250 V/m
- C 10 V/m
- ■ 1000 V/m
- E Aucune de ces réponses n'est correcte.

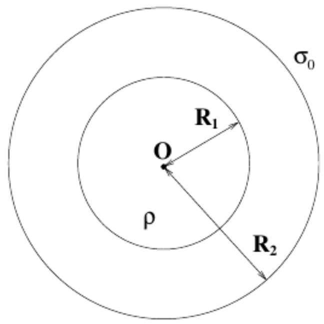
Question 9 **(0.5 point)** À l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique,

- A le champ électrique créé par les charges du conducteur est nul.
- ■ le champ électrique créé par toutes les charges (du conducteur et extérieures) est nul.
- C le champ électrique créé par les charges extérieures au conducteur est nul.
- D Aucune de ces réponses n'est correcte.

Sphères chargées (9 points)

Une sphère pleine, de rayon R_1 et de centre O, porte une densité volumique de charge $\rho(r) = \dfrac{A}{r^2}$, avec A une constante.

Cette sphère est à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon $R_2 > R_1$ de même centre et chargée uniformément en surface, avec une densité surfacique de charge uniforme σ_0, avec σ_0 une constante.



Question 10 **(1 point)** La dimension de la constante A est donc :

- [A] $Q^{-1}L$
- ■ QL^{-1}
- [C] QL^{-2}
- [D] $Q^{-1}L^{-1}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 **(1 point)** Les charges totales Q_1 et Q_2 de chacune des sphères valent :

- ■ $Q_1 = 4\pi A R_1$ et $Q_2 = 4\pi\sigma_0 R_2^2$
- [B] $Q_1 = 4\pi A R_1^2$ et $Q_2 = 4\pi\sigma_0 R_2$
- [C] $Q_1 = \pi A R_1^{-2}$ et $Q_2 = \pi\sigma_0 R_2^{-2}$
- [D] $Q_1 = \pi A R_1^{-1}$ et $Q_2 = \pi\sigma_0 R_2$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 **(1 point)** Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ ainsi créé, à une distance r du point O, dans le cas $0 < r \leqslant R_1$ s'exprime par :

- [A] $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{AR_1 + \sigma_0 R_2^2}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r$
- [B] $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{AR_1}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r$
- [C] $\overrightarrow{E}(r) = -\dfrac{A}{\epsilon_0 r}\overrightarrow{u}_r$
- ■ $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{A}{\epsilon_0 r}\overrightarrow{u}_r$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 **(1 point)** Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ ainsi créé, à une distance r du point O, dans le cas $R_1 \leqslant r < R_2$ s'exprime par :

- A $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{AR_1 + \sigma_0 R_2^2}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r$
- ■ $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{AR_1}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r$
- B $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{A}{\epsilon_0 r}\overrightarrow{u}_r$
- D $\overrightarrow{E}(r) = -\dfrac{A}{\epsilon_0 r}\overrightarrow{u}_r$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 **(1 point)** Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ ainsi créé, à une distance r du point O, dans le cas $r > R_2$ s'exprime par :

- A $\overrightarrow{E}(r) = -\dfrac{A}{\epsilon_0 r}\overrightarrow{u}_r$
- C $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{A}{\epsilon_0 r}\overrightarrow{u}_r$
- ■ $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{AR_1 + \sigma_0 R_2^2}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r$
- D $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{AR_1}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u}_r$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ **(3 points)** Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression du champ électrique total $\overrightarrow{E}(r)$ dans le cas $0 < r \leqslant R_1$.

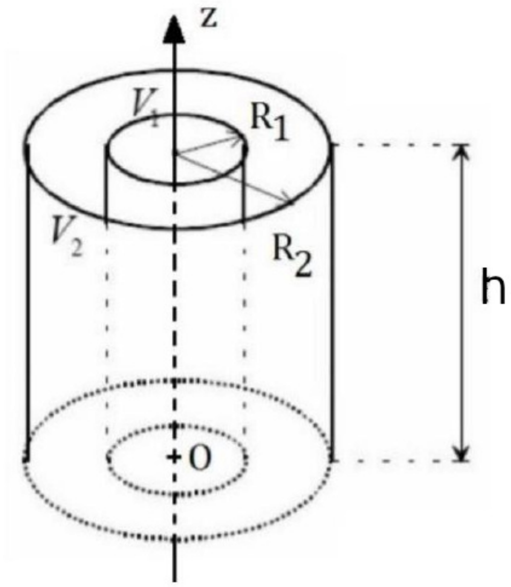
Question 16 **(1 point)** En supposant le potentiel nul à l'infini, le potentiel électrique $V(r)$ ainsi créé, à une distance r du point O, dans le cas $0 < r \leqslant R_1$ s'exprime par :

- A $V(r) = \dfrac{A}{\epsilon_0}\left(\dfrac{R_1}{r}\right) + \dfrac{A}{\epsilon_0}$
- C $V(r) = -\dfrac{A}{\epsilon_0}\left(\dfrac{R_1}{r}\right)^2 + \dfrac{A + \sigma_0 R_2}{\epsilon_0}$
- B $V(r) = \dfrac{A}{\epsilon_0}\ \ln\left(\dfrac{R_1}{r}\right) - \dfrac{A}{\epsilon_0}$
- ■ $V(r) = \dfrac{A}{\epsilon_0}\ \ln\left(\dfrac{R_1}{r}\right) + \dfrac{A + \sigma_0 R_2}{\epsilon_0}$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Condensateur cylindrique (6 points)

Un condensateur cylindrique à air est formé de deux armatures coaxiales, de rayons notés R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$.

On appelle Q_{int} la charge à la surface du cylindre intérieur de rayon R_1 et de hauteur h. On suppose ici que ce conducteur est de longueur infinie ($h \gg R_2 > R_1$).



Question 17 **(1 point)** $\vec{E}$ en un point M situé à la distance r de l'axe, avec $R_1 < r < R_2$ vaut :

- [A] $\vec{E} = \dfrac{Q_{int}}{2\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
- ■ $\vec{E} = \dfrac{Q_{int}}{2\pi\epsilon_0 h r}\vec{u}_r$
- [C] $\vec{E} = \dfrac{Q_{int}}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{u}_r$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 18 **(2 points)** La capacité C de ce condensateur a pour expression :

- [A] $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)}$
- [B] $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 h}{\dfrac{R_2}{R_1}}$
- ■ $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 19 ♣ **(2 points)** Donner l'expression de cette capacité C, en détaillant.

Question 20 **(1 point)** Pour $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, cette capacité C se simplifie en :

- [A] $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 e h}{R_1}$
- ■ $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 R_1 h}{e}$
- [C] $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 R_1 e}{h}$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Force de Lorentz (5 points)

Un proton ($q = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$) se déplace dans un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_x}$ avec $B = 0{,}5\,\mathrm{T}$.

À $t = 0$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du proton est tel que $v_x = 1{,}5 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$, $v_y = 0\,\mathrm{m/s}$, $v_z = 2{,}0 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$. La position du proton est telle que $\overrightarrow{r}(t=0) = \overrightarrow{0}$.

À $t > 0$, le proton a désormais une vitesse $\overrightarrow{v}$ à 3 composantes non nulles. $\overrightarrow{B}$ est toujours uniforme, constant orienté suivant x.

Question 21 **(1 point)** Les équations différentielles du premier ordre qui régissent les composantes de la vitesse sont données par :

- [A] $\dot{v}_x = 0$, $\dot{v}_y = +\frac{qB}{m}v_z$ et $\dot{v}_z = +\frac{qB}{m}v_x$
- [B] $\dot{v}_x = -\frac{qB}{m}v_y$, $\dot{v}_y = +\frac{qB}{m}v_x$ et $\dot{v}_z = 0$
- [C] $\dot{v}_x = +\frac{qB}{m}v_y$, $\dot{v}_y = -\frac{qB}{m}v_x$ et $\dot{v}_z = 0$
- ■ $\dot{v}_x = 0$, $\dot{v}_y = +\frac{qB}{m}v_z$ et $\dot{v}_z = -\frac{qB}{m}v_y$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 22 ♣ **(2 points)** Donner les détails des calculs permettant d'obtenir ces équations différentielles.

Question 23 **(2 points)** Avec $\Omega = \frac{q}{m}B$, on trouve que la trajectoire du proton est une hélice qui a pour axe la droite $(z = 0; y = R)$ et

- [A] pour rayon $R = \frac{v_z(t=0)}{2\pi\Omega}$ et pour pas $p = \frac{2\pi v_z(t=0)}{\Omega}$.
- ■ pour rayon $R = \frac{v_z(t=0)}{\Omega}$ et pour pas $p = v_z(t=0)\frac{2\pi}{\Omega}$.
- [C] pour rayon $R = v_z(t=0)\Omega$ et pour pas $p = v_z(t=0)2\pi\Omega$.
- [D] pour rayon $R = \frac{2\pi\Omega}{v_z(t=0)}$ et pour pas $p = v_z(t=0)\frac{2\pi}{\Omega}$.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Nom et prénom :

....

....

Groupe :

Les réponses ne doivent être apportées que sur cette feuille.
La copie ne sera corrigée que si :

- **elle comporte vos nom, prénom et groupe ;**
- **les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;**
- **la feuille réponse ne comporte pas de ratures.**

Question 1 : A ■ C D

Question 2 : A ■ C D

Question 3 : A B ■ D

Question 4 : A ■ C D

Question 5 : A ■ C D

Question 6 : ■ B C D

Question 7 : ■ B C D

Question 8 : A B C ■ E

Question 9 : A ■ C D

Question 10 : A ■ C D E

Question 11 : ■ B C D E

Question 12 : A B C ■ E

Question 13 : A B ■ D E

Question 14 : A ■ C D E

Question 16 : A B C ■ E

Question 17 : A ■ C D

Question 18 : A B ■ D

Question 20 : A ■ C D

Question 21 : A B C ■ E

Question 23 : A ■ C D E

Question 15 : **Sphères chargées**

[redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

Question 15 ♣ (3 points) Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression du champ électrique total $\vec{E}(r)$ dans le cas $0 < r \leqslant R_1$.

Théorème de Gauss : surface de Gauss = sphère $S(r)$ de centre O et de rayon r

• Symétries : tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie de la distribution de charges ; $\vec{E} = E(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_r$

• Invariants : la distribution de charges est invariante par rotation autour de O : $E(r,\theta,\varphi) = E(r)$

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$$

$$\oiint_{M \in S(r)} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}, \quad Q(r) = \text{charge à l'intérieur de } S(r)$$

avec

$$\oiint_{S(r)} E(r)\,\vec{u}_r(r) \cdot \overbrace{dS_r}^{r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}\,\vec{u}_r = E(r) \oiint_{S(r)} dS_r = 4\pi r^2 E(r)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$$

si $0 < r \leq R_1$: $Q(r) = \iiint_{S(r)} \rho(r)\,d\tau = \overbrace{\int_0^r \frac{A}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2}\,dr}^{Ar}\ \overbrace{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta}^{=2}\ \overbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}^{2\pi}$

$Q(r) = 4\pi A r$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{A}{\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r$$

Question 19 : Condensateur cylindrique [redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

Question 19 ♣ **(2 points)** Donner l'expression de cette capacité C, en détaillant.

• $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r = \dfrac{Q_1}{2\pi \varepsilon_0 h r}\vec{u}_r$ pour $R_1 < r < R_2$

• $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M) \iff dV = -\vec{E}(M)\cdot\vec{dr} = -E(r)\, dr$

pour $R_1 < r < R_2$: $dV = -\dfrac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\dfrac{dr}{r}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_2^1 dV = V_1 - V_2 = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\left[\ln r\right]_{R_2}^{R_1} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

donc $Q_1 = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}(V_1 - V_2)$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

Question 22 : # Force de Lorentz

Réservé à l'enseignant(e)

Question 22 ♣ **(2 points)** Donner les détails des calculs permettant d'obtenir ces équations différentielles.

$$\vec{v}(t=0) = \begin{vmatrix} v_x(0) \\ 0 \\ v_z(0) \end{vmatrix}, \quad \vec{OM}(t=0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2ème loi de Newton $\quad m\vec{a} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}, \quad \vec{B} = B\,\vec{e_x}$

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} (1)\ v_y \times 0 - v_z 0 = 0 \\ (2)\ v_z \times B - v_x 0 = v_z B \\ (3)\ v_x \times 0 - v_y B = -v_y B \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 0 & (1) \\ \dot{v}_y = (qB/m)\, v_z & (2) \\ \dot{v}_z = -(qB/m)\, v_y & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{v_x = cst = v_x(t=0)} \\ \ddot{v}_y = (qB/m)\underbrace{(-qB/m)\,v_y}_{\dot{v}_z} = -(qB/m)^2\, v_y \\ \ddot{v}_z = -(qB/m)\underbrace{(qB/m)\,v_z}_{\dot{v}_y} = -(qB/m)^2\, v_z \end{cases}$$

Feuille supplémentaire - (indiquer le numéro de la question rédigée)

Correction