Mécanique du point matériel

PI1-MI/GC — CC1 — 2023/2024

Durée : 1h30' (2h en cas de tiers-temps)

Sont interdits :
- les documents ;
- tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;
- les déplacements et les échanges.

Consignes :
Seules les dernières feuilles doivent être rendues :

1. la feuille-réponse du QCM :
   (a) y indiquer vos nom, prénom et groupe dès le début officiel de l'épreuve ;
   (b) remplir complètement au stylo noir la case correspondant à la bonne réponse (une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée) ;
   (c) chaque question ne comporte qu'une seule réponse correcte ;
   (d) il n'y a pas de point négatif pour une réponse incorrecte ;
2. le cas échéant, les feuilles de réponses aux questions ouvertes (icône ♣).

Le cas échéant, vos réponses doivent être justifiées.
Une attention particulière sera portée à la qualité et au soin de la rédaction.

Vérifier que ce document comporte 10 pages et 17 questions.

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Considérations générales *(9 points)*

Pour les trois questions suivantes, on se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ muni des repères cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et polaire $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Question 1 [CgPolQ0] *(1 point)*
Les vecteurs de la base polaire s'écrivent dans la base cartésienne :

- ■ $\vec{u}_r = \cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y$ et $\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{u}_x + \cos(\theta)\,\vec{u}_y$
- B $\vec{u}_r = \cos(\theta)\,\vec{u}_r + \sin(\theta)\,\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{u}_r + \cos(\theta)\,\vec{u}_\theta$
- C $\vec{u}_r = \sin(\theta)\,\vec{u}_x + \cos(\theta)\,\vec{u}_y$ et $\vec{u}_\theta = -\cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 2 [CgPolQ1] ♣ *(2 points)*
Dans la base polaire, exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}$ (détailler vos calculs).

Question 3 [CgPolQ2] ♣ *(3 points)*
Dans la base polaire, exprimer les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ (détailler vos calculs).

Question 4 [CgRes] *(1 point)*
Soit un ressort d'extrémités H et M, de raideur k, de longueur ℓ et de longueur à vide ℓ_0. On note $\vec{u}_{\mathrm{HM}}$ un vecteur unitaire de H vers M. La force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur M s'écrit :

- ■ $-k\,(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_{\mathrm{HM}}$
- B $k\,(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_{\mathrm{HM}}$
- C $-k\,(\ell-\ell_0)^2\,\vec{u}_{\mathrm{HM}}$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 5 [CgPcpIn] *(1 point)*
Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système isolé est :

- ■ rectiligne et uniforme
- B non-rectiligne mais uniforme
- C rectiligne mais non-uniforme
- D On ne peut pas conclure.

Question 6 [CgFVisq] *(1 point)*
Dans l'expression de la force de frottement fluide $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, le coefficient α est :

- ■ nécessairement positif
- B nécessairement négatif
- C positif ou négatif selon les cas

Platine CD *(6 points)*

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, ici approximé galiléen, on considère la situation suivante : une platine CD initialement au repos (instant t_i) fait deux tours avec une accélération angulaire constante $\ddot{\theta}_0$ jusqu'à atteindre (instant t_f) une vitesse angulaire constante $\dot{\theta}_0$ pour la lecture du disque.

Question 7 [PbCDQ-1] *(1 point)*
$\forall\, t \in [t_i; t_f]$, l'angle $\theta(t)$ est égal à :

- ■ $\theta(t_i) + \dfrac{\ddot{\theta}_0}{2}\,(t-t_i)^2$
- B $\dfrac{\ddot{\theta}_0}{2}\,(t-t_i)^2$
- C $\theta(t_i) - \dfrac{\ddot{\theta}_0}{2}\,(t-t_i)^2$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 8 [PbCDQ0] *(1 point)*
La durée $t_f - t_i$ de la phase d'accélération angulaire est donc égale à :

- ■ $\dfrac{8\pi}{\dot{\theta}_0}$
- B $\dfrac{\dot{\theta}_0}{8\pi}$
- C $\dfrac{4\pi}{\dot{\theta}_0}$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 9 [PbCDQ1] *(1 point)*
$\ddot{\theta}_0$ est donc égale à :

- ■ $\dfrac{\dot{\theta}_0^2}{8\pi}$
- B 0
- C $-\dfrac{\dot{\theta}_0^2}{8\pi}$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 10 [PbCDQ2] *(1 point)*
$\forall\, t \in [t_i; t_f]$, la vitesse $\vec{v}(t)$ d'un point du disque à distance r du centre est égale à :

- ■ $r\,\ddot{\theta}_0\,(t-t_i)\,\vec{u}_\theta$
- B $\dot{r}\,\vec{u}_r$
- C $r\,\ddot{\theta}_0\,(t-t_i)\,\vec{u}_r$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 11 [PbCDQ3] *(1 point)*
$\forall\, t \in [t_i; t_f]$, l'accélération $\vec{a}(t)$ d'un point du disque à distance r du centre est égale à :

- ■ $-r\left[\ddot{\theta}_0\,(t-t_i)\right]^2\,\vec{u}_r + r\,\ddot{\theta}_0\,\vec{u}_\theta$
- B $\left\{\ddot{r} - r\left[\ddot{\theta}_0\,(t-t_i)\right]^2\right\}\,\vec{u}_r$
- C $-r\left[\ddot{\theta}_0\,(t-t_i)\right]^2\,\vec{u}_r$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 12 [PbCDQ4] *(1 point)*
$\forall\, t > t_f$, l'accélération $\vec{a}(t)$ d'un point du disque à distance r du centre est égale à :

- A $-r\left[\ddot{\theta}_0\,(t-t_i)\right]^2\,\vec{u}_r$
- B $-r\left[\ddot{\theta}_0\,(t-t_i)\right]^2\,\vec{u}_r + r\,\ddot{\theta}_0\,\vec{u}_\theta$
- C $\ddot{r}\,\vec{u}_r$
- ■ Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Satellite géostationnaire *(8 points)*

Dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$, ici approximé galiléen, on considère la situation suivante : un satellite est en orbite géostationnaire s'il se trouve à chaque instant à la verticale et à distance constante d'un même point de la surface terrestre.
Le satellite est assimilé à un point matériel de masse m_S, à distance h_S au-dessus de la surface terrestre, et soumis uniquement à la gravitation terrestre. La Terre est en rotation uniforme sur elle-même, de période T_T.
Dans ce qui suit, on cherche entre autres à déterminer h_S.

Données :
- constante de gravitation universelle $\mathcal{G} \approx 6 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
- masse de la Terre $m_T \approx 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- rayon de la Terre $R_T \approx 6 \times 10^{3}\,\mathrm{km}$

Question 13 [PbSatQ0] ♣ *(1 point)*
Exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}_T$ de rotation de la Terre sur elle-même en fonction de T_T.

Question 14 [PbSatQ1] ♣ *(2 points)*
Exprimer, en justifiant votre réponse, l'accélération $\vec{a}_S$ du satellite en fonction des paramètres du problème.

Question 15 [PbSatQ2] ♣ *(2 points)*
À partir du Principe Fondamental de la Dynamique, exprimer h_S en fonction des paramètres du problème.

Question 16 [PbSatQ4] ♣ *(1 point)*
En déduire un ordre de grandeur numérique de h_S.

Question 17 [PbSatQ5] ♣ *(2 points)*
Exprimer la norme v_S de la vitesse du satellite en fonction des paramètres du problème, puis en donner un ordre de grandeur numérique.

Catalogue

Mécanique du point matériel - PI1-MI/GC - CC1 - 2023/2024

NOM : ....

Prénom : ....

Groupe : ....

CODAGE DU N°ÉTUDIANT *HORIZONTALEMENT* (DANS LE SENS DE LECTURE)

Premier chiffre du n°étudiant

Dernier chiffre du n°étudiant

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

SENS DE REMPLISSAGE $\longrightarrow$ DU N°ÉTUDIANT

Les réponses au QCM ne doivent être apportées que sur cette feuille.
La copie ne sera corrigée que si :

- **elle comporte vos nom, prénom et groupe ;**
- **les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;**
- **la feuille-réponse ne comporte pas de ratures.**

Question 1	■	B	C	D
Question 4	■	B	C	D
Question 5	■	B	C	D
Question 6	■	B	C	
Question 7	■	B	C	D
Question 8	■	B	C	D
Question 9	■	B	C	D
Question 10	■	B	C	D
Question 11	■	B	C	D
Question 12	A	B	C	■

Question 2 **Dérivée base polaire** *Réservé à l'enseignant(e)*

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \underbrace{\|\vec{u}_r\|}_{=1} \left[\cos(\theta)\, \vec{u}_x + \sin(\theta)\, \vec{u}_y \right] \\ \vec{u}_\theta = \overbrace{\|\vec{u}_\theta\|} \left[-\sin(\theta)\, \vec{u}_x + \cos(\theta)\, \vec{u}_y \right] \end{cases}$$

avec $\vec{u}_{\substack{x \\ y}}(\cancel{t})$; $\vec{u}_{\substack{r \\ \theta}}[\theta(t)]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \left[-\sin(\theta)\, \vec{u}_x + \cos(\theta)\, \vec{u}_y \right] = \dot{\theta}\, \vec{u}_\theta \\ \left(\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \left[-\cos(\theta)\, \vec{u}_x - \sin(\theta)\, \vec{u}_y \right] = -\dot{\theta}\, \vec{u}_r \end{cases}$$

Question 3 **Grandeurs cinématiques** *Réservé à l'enseignant(e)*

$$\overrightarrow{OM} = r\, \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\, \vec{u}_r + r\, \dot{\vec{u}}_r$$

$$= \dot{r}\, \vec{u}_r + r\dot{\theta}\, \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\, \vec{u}_r + \dot{r}\, \dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\, \vec{u}_\theta + r\left(\ddot{\theta}\, \vec{u}_\theta + \dot{\theta}\, \dot{\vec{u}}_\theta \right)$$

$$= \ddot{r}\, \vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\, \vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\, \vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\, \vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\, \vec{u}_r$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \vec{u}_\theta$$

Question 13

Satellite : $\dot{\theta}_T$ ***Réservé à l'enseignant(e)***

$$|\dot{\theta}_T| = \frac{2\pi}{T_T}$$

car on ne connaît pas le sens de rota$^{\circ}$

Question 14

Satellite : $\vec{a}_S$ ***Réservé à l'enseignant(e)***

Ds R_g, avec repère polaire centré au centre de la Terre :

mouvement $\begin{cases} \text{circulaire} : & r = c^{te} = R_T + h_S \quad ; \quad \dot{r} = 0 \quad ; \quad \ddot{r} = 0 \\ \text{uniforme} : & \dot{\theta} = c^{te} = \dot{\theta}_T \quad ; \quad \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{a}_S = -(R_T + h_S)\,\dot{\theta}_T^2\,\vec{u}_r$$

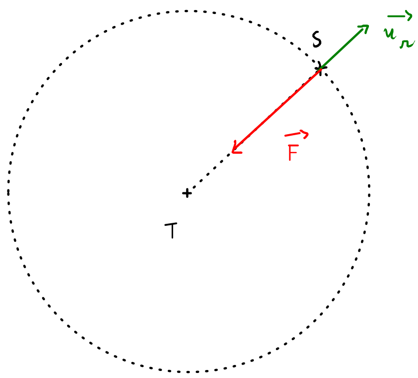
$$= -(R_T + h_S)\left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 \vec{u}_r$$

Question 15 **Satellite : h_S** ***Réservé à l'enseignant(e)***

Ds $\mathcal{R}_g \simeq$ galiléen : PFD sur satellite

$$m\vec{a}_s = -\cancel{m}\,(R_T+h_s)\left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 \vec{u}_r = -\mathcal{G}\,\frac{\cancel{m}\, m_T}{(R_T+h_s)^2}\,\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \quad h_s = \left[\mathcal{G}\, m_T \left(\frac{T_T}{2\pi}\right)^2\right]^{1/3} - R_T$$



Question 16 **Satellite : h_S (odg)** ***Réservé à l'enseignant(e)***

$$h_s \simeq \left\{6\times10^{-11}\, m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2} \times 6\times10^{24}\, kg \times \left[\frac{\overset{6\times4}{24}\times(60)^2\, s}{2\pi \simeq 6}\right]^2\right\}^{1/3} - 6\times10^6\, m$$

$$\simeq \left(6^6\times\underset{16}{4^2}\times10^{17}\right)^{1/3} - 6\times10^6\, m \simeq 6\times10^6\left(6\times\underset{\simeq 1}{1{,}6^{1/3}} - 1\right) \simeq 30\cdot10^6\, m$$

Question 17 **Satellite : v_S (+ odg)** ***Réservé à l'enseignant(e)***

$$v_s = \|\vec{v}_s\| = (R_T+h_s)\,|\dot{\theta}_T| = (R_T+h_s)\,\frac{2\pi}{T_T}$$

$$\simeq \left[\underset{6^2}{(6+30)}\times10^6\, m\right]\times\frac{\overset{\simeq 6}{2\pi}}{\underset{6\times4}{24}\times(60)^2\, s} \simeq \frac{\cancel{6^3}}{\cancel{6^3}}\times\frac{1}{4}\times10^4\, m\cdot s^{-1} = 2{,}5\times10^3\, m\cdot s^{-1}$$

Platine CD

Ds le réf d'étude :

7/ $\forall t \in [t_i ; t_f]$: $\dot\theta(t) = \underbrace{\dot\theta(t_i)}_{0} + \int_{t_i}^{t} \underbrace{\ddot\theta(t)}_{c^{te} = \ddot\theta_0} dt = \ddot\theta_0 (t - t_i)$ (1)

$\theta(t) = \theta(t_i) + \int_{t_i}^{t} \dot\theta(t)\,dt = \theta(t_i) + \ddot\theta_0 \int_{t_i}^{t} \underbrace{(t-t_i)\,dt}_{d\left[\frac{1}{2}(t-t_i)^2 + c^{te}\right]} = \theta(t_i) + \frac{\ddot\theta_0}{2}(t-t_i)^2$ (2)

8/ (1) $\Rightarrow$ $t_f - t_i = \frac{\dot\theta(t_f)}{\ddot\theta_0} = \frac{\dot\theta_0}{\ddot\theta_0}$ (3)

(2) $\Rightarrow$ $(t_f - t_i)^2 = \frac{2[\theta(t_f) - \theta(t_i)]}{\ddot\theta_0} = \frac{8\pi}{\ddot\theta_0}$ (4)

$\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow t_f - t_i = \frac{8\pi}{\dot\theta_0}$ (5) (N.B. : $\langle \dot\theta \rangle (t_i ; t_f) = \frac{\dot\theta_0}{2}$ cohérent car $\ddot\theta = c^{te}$)

9/ (1) $\Rightarrow$ $\ddot\theta_0 = \frac{\dot\theta_0}{t_f - t_i} \overset{(5)}{=} \frac{\dot\theta_0^{\,2}}{8\pi}$

$\forall t \in [t_i ; t_f]$, mvmt circulaire (non-uniforme) : $r = c^{te}$; $\dot r = 0$; $\ddot r = 0$

10/ $\Rightarrow$ $\vec v(t) = r\,\dot\theta(t)\,\vec u_\theta \overset{(1)}{=} r\,\ddot\theta_0 (t - t_i)\,\vec u_\theta$

11/ $\Rightarrow$ $\vec a(t) = -r\,\dot\theta^2(t)\,\vec u_r + r\,\ddot\theta_0\,\vec u_\theta \overset{(1)}{=} -r\left[\ddot\theta_0 (t-t_i)\right]^2 \vec u_r + r\,\ddot\theta_0\,\vec u_\theta$

12/ $\forall t > t_f$, mvmt circulaire uniforme : $\begin{cases} r = c^{te} ; \dot r = 0 ; \ddot r = 0 \\ \dot\theta = c^{te} = \dot\theta_0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\vec a(t) = -r\,\dot\theta_0^2\,\vec u_r \overset{(3)}{=} -r\left[\ddot\theta_0 (t_f - t_i)\right]^2 \vec u_r$