CC1

Mécanique du point

04 Mars 2024 — PréIng1

Durée : 1h30 minutes

Sont interdits :

- les documents ;
- tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;
- les déplacements et les échanges.

Consignes :

1. Vérifiez que le sujet est composé de 16 pages et 24 questions ;
2. Seules les dernières feuilles doivent être rendues ;
3. Complétez la page 9 (nom, prénom etc...) dès le début officiel de l'épreuve ;
4. Les détails des calculs demandés doivent être portés sur ces dernières feuilles à l'emplacement correspondant à la question ;
5. Dans les deux grilles, les cases correspondant à la bonne réponse doivent être remplies complètement au stylo noir ;
6. Chaque question ne comporte qu'une seule réponse possible ;
7. Il n'y a de point négatif pour une mauvaise réponse que pour les questions de cours ;
8. Une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.

Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (8 points)

Question 1 (1 point)
La dimension physique d'une accélération est :

- [A] $M \cdot L \cdot T^{-1}$
- [B] $L \cdot T^{-1}$
- ■ $L \cdot T^{-2}$
- [D] $M \cdot L \cdot T^{-2}$
- [E] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 2 (1 point)
Un angle est une grandeur

- [A] avec une dimension mais sans unité.
- [B] sans dimension et donc sans unité.
- ■ sans dimension mais avec une unité.
- [D] sans unité donc sans dimension.
- [E] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 3 (1 point)
En deux dimensions, les coordonnées cartésiennes x et y peuvent s'exprimer en fonction des cordonnées polaires par la formule :

- [A] $x = r \sin\theta$ et $y = r\cos\theta$
- [B] $x = r$ et $y = r\tan\theta$
- ■ $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 4 (2 points)
Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression générale de la position $\overrightarrow{OM}$, de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Question 5 (1 point)
L'accélération dans un mouvement circulaire de rayon R est :

- [A] $\vec{a}(M) = -\frac{v}{R}\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$
- ■ $\vec{a}(M) = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$
- [C] $\vec{a}(M) = \frac{v^2}{R}\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 6 (0.5 point)
Le principe d'inertie énonce que, par rapport à un référentiel galiléen, un point matériel isolé persiste dans un mouvement :

- [A] non rectiligne mais uniformément accéléré
- ■ rectiligne et uniforme
- [C] non rectiligne mais uniforme
- [D] rectiligne et uniformément accéléré
- [E] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 7 (0.5 point)
En cinématique classique, le mouvement est :

- [A] absolu ou relatif à un référentiel selon les cas.
- ■ toujours relatif à un référentiel.
- [C] toujours absolu.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 8 (1 point)
Dans l'expression de la force de frottement fluide $\overrightarrow{F} = -\alpha \overrightarrow{v}$, le coefficient α est :

- [A] positif ou négatif selon le cas.
- [B] nécessairement négatif.
- ■ nécessairement positif.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Trajectoire en coordonnées cylindriques (6 points)

Un mobile M décrit une trajectoire d'équations paramétriques dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$x(t) = R\cos(\omega t)$
$y(t) = R\sin(\omega t)$
$z(t) = \alpha t$

R est une constante réelle strictement positive.

Question 9 (1 point)
Les dimensions physiques de R et ω sont :

- ■ $[R] = \mathrm{L}$ et $[\omega] = \mathrm{T}^{-1}$
- B $[R] = \mathrm{L}^2$ et $[\omega] = \mathrm{T}^{-1}$
- C $[R] = \mathrm{L}$ et $[\omega] = \mathrm{T}^{-2}$
- D $[R] = \mathrm{L}^2$ et $[\omega] = \mathrm{T}^{-2}$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 10 (1 point)
Les équations paramétriques cylindriques du mouvement $(r(t), \theta(t), z(t))$ s'écrivent :

- A $r(t) = \dfrac{R}{2}$, $\theta(t) = \omega$, $z(t) = \alpha$
- B $r(t) = R$, $\theta(t) = \omega$, $z(t) = \alpha$
- C $r(t) = \dfrac{R}{2}$, $\theta(t) = \omega t$, $z(t) = \alpha t$
- ■ $r(t) = R$, $\theta(t) = \omega t$, $z(t) = \alpha t$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 11 (1 point)
La trajectoire est :

- A une parabole
- B un cercle.
- ■ une hélice.
- D une sinusoïde.
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 12 (1 point)
Le vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base cartésienne s'écrit :

- A $\vec{v} = R\omega\sin(\omega t)\vec{u}_x - R\omega\cos(\omega t)\vec{u}_y - \alpha\vec{u}_z$
- B $\vec{v} = -R\omega\cos(\omega t)\vec{u}_x + R\omega\sin(\omega t)\vec{u}_y + \alpha\vec{u}_z$
- C $\vec{v} = R\omega\cos(\omega t)\vec{u}_x - R\omega\sin(\omega t)\vec{u}_y - \alpha\vec{u}_z$
- ■ $\vec{v} = -R\omega\sin(\omega t)\vec{u}_x + R\omega\cos(\omega t)\vec{u}_y + \alpha\vec{u}_z$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 13 (2 points)
Établir l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base cartésienne puis dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, en détaillant les calculs.
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Cinématique à deux dimensions (7 points)

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude, on utilise le système de coordonnées cartésiennes (x, y) associé à la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et le système de coordonnées polaires (r, θ) associé à la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Question 14 (0.5 point)
Les dérivées des vecteurs de la base polaire sont telles que :

- A $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_r$
- B $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\vec{u}_\theta$
- ■ $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$
- D *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 15 (0.5 point)
On cherche à exprimer les vecteurs de la base polaire en fonction de ceux de la base cartésienne. Alors :

- A $\vec{u}_r = \sin\theta\ \vec{u}_x - \cos\theta\ \vec{u}_y$
- ■ $\vec{u}_r = \cos\theta\ \vec{u}_x + \sin\theta\ \vec{u}_y$
- C $\vec{u}_r = \sin\theta\ \vec{u}_x + \cos\theta\ \vec{u}_y$
- D $\vec{u}_r = \cos\theta\ \vec{u}_x - \sin\theta\ \vec{u}_y$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 16 (0.5 point)
La dérivée du vecteur $\vec{u}_r$ par rapport à l'angle θ vaut alors :

- A $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \sin\theta\ \vec{u}_x + \cos\theta\ \vec{u}_y$
- B $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \cos\theta\ \vec{u}_x + \sin\theta\ \vec{u}_y$
- ■ $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\ \vec{u}_x + \cos\theta\ \vec{u}_y$
- D $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\cos\theta\ \vec{u}_x + \sin\theta\ \vec{u}_y$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 17 (1 point)
Détailler les calculs précédents permettant d'obtenir l'expression de la dérivée du vecteur $\vec{u}_r$ par rapport à l'angle θ, dans la base cartésienne.
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, un point M est animé d'un mouvement circulaire de rayon R. Sa position est repérée par l'angle $\theta(t)$ des coordonnées polaires. Dans $\mathcal{R}$:

Question 18 (0.5 point)
Le vecteur vitesse de M est de composante(s) :

- ■ purement orthoradiale
- [B] purement radiale
- [C] radiale et orthoradiale
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 19 (1 point)
Le vecteur vitesse de M est :

- [A] $\vec{v}(t) = R\vec{u}_r + R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
- [B] $\vec{v}(t) = -R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
- ■ $\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
- [D] $\vec{v}(t) = \dot{R}\vec{u}_r - R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
- [E] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 20 (0.5 point)
Le vecteur accélération de M est de composante(s) :

- [A] purement orthoradiale
- [B] radiale (centrifuge) et orthoradiale
- [C] purement radiale
- ■ radiale (centripète) et orthoradiale
- [E] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 21 (1 point)
Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression de l'accélération $\vec{a}(t)$ de M, dans la base polaire.
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

L'évolution temporelle de θ est donnée par $\theta(t) = -\dfrac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma$ avec α, β et γ des constantes.

Question 22 (0.5 point)
Le vecteur vitesse de M peut alors s'écrire :

- [A] $\vec{v}(t) = R\left(\alpha t - \beta\right)\vec{u}_\theta$
- [B] $\vec{v}(t) = R\left(-\frac{\alpha}{2}t + \beta\right)\vec{u}_\theta$
- [C] $\vec{v}(t) = R\left(-\frac{\alpha}{2}t - \beta\right)\vec{u}_\theta$
- ■ $\vec{v}(t) = R\left(-\alpha t + \beta\right)\vec{u}_\theta$
- [E] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 23 (0.5 point)
Le vecteur accélération de M peut alors s'écrire :

- A $\vec{a}(t) = -R\alpha\vec{u}_\theta$
- B $\vec{a}(t) = -R\left[(\alpha t + \beta)^2\,\vec{u}_r + \alpha\vec{u}_\theta\right]$
- ■ $\vec{a}(t) = -R\left[(-\alpha t + \beta)^2\,\vec{u}_r + \alpha\vec{u}_\theta\right]$
- D $\vec{a}(t) = -R\,(-\alpha t + \beta)^2\,\vec{u}_r$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 24 (0.5 point)
La vitesse angulaire en rad/s, pour $\alpha = 0\,\mathrm{rad/s^2}$, $\beta = \pi$ rad/s et $\gamma = -\frac{\pi}{2}$ rad, vaut :

A $\pi/2$ B $-\pi$ C $-\pi/2$ ■ π E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Les réponses au QCM ne doivent être apportées que sur cette feuille.
La copie ne sera corrigée que si :

- **elle comporte vos nom, prénom et groupe ;**
- **les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;**
- **la feuille-réponse ne comporte pas de ratures.**

Question 1 : A B ■ D E

Question 2 : A B ■ D E

Question 3 : A B ■ D

Question 5 : A ■ C D

Question 6 : A ■ C D E

Question 7 : A ■ C D

Question 8 : A B ■ D

Question 9 : ■ B C D E

Question 10 : A B C ■ E

Question 11 : A B ■ D E

Question 12 : A B C ■ E

Question 14 : A B ■ D

Question 15 : A ■ C D E

Question 16 : A B ■ D E

Question 18 : ■ B C D

Question 19 : A B ■ D E

Question 20 : A B C ■ E

Question 22 : A B C ■ E

Question 23 : A B ■ D E

Question 24 : A B C ■ E

2 points

Question 4 : Position, vitesse et accélération [redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

- $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$ et $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$; $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$ 0.5 point

- $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r$

donc $\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}$ 0.5 point

- $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$= \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{u}}_\theta$ 0.5 point

$= \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$

donc $\boxed{\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right]\vec{u}_r + \left[2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right]\vec{u}_\theta}$ 0.5 point

2 points

Question 13 :

Vitesse [redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

- $\overrightarrow{OM} = R\cos(\omega t)\,\vec{u}_x + R\sin(\omega t)\,\vec{u}_y + \alpha t\,\vec{u}_z$
- $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$ avec $r = \sqrt{R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t)}$ $= R$

$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r + \alpha t\,\vec{u}_z$

- $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -R\omega\sin(\omega t)\,\vec{u}_x + R\omega\cos(\omega t)\,\vec{u}_y + \alpha\,\vec{u}_z$ 1 point
- $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\,\dot{\vec{u}}_r + \alpha\,\vec{u}_z$

$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \alpha\,\vec{u}_z$ 1 point

1 point

Question 17 : **Dérivée du vecteur $\vec{u}_r$** *Réservé à l'enseignant(e)*

- $\vec{u}_r = \cos\theta \, \vec{u}_x + \sin\theta \, \vec{u}_y$

$\vec{u}_\theta = -\sin\theta \, \vec{u}_x + \cos\theta \, \vec{u}_y$ 0.5 point

- $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dfrac{d\cos\theta}{d\theta} \, \vec{u}_x + \dfrac{d\sin\theta}{d\theta} \, \vec{u}_y$

$= -\sin\theta \, \vec{u}_x + \cos\theta \, \vec{u}_y$ 0.5 point

1 point

Question 21 : **Accélération** *Réservé à l'enseignant(e)*

- $\overrightarrow{OM} = R \, \vec{u}_r$ mouvement circulaire $\dot{R} = \ddot{R} = 0$

- $\vec{v} = \underbrace{\dot{R}}_{=0} \, \vec{u}_r + R \, \dot{\vec{u}}_r = R \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta$ 0.5 point

- $\vec{a} = \underbrace{\dot{R}}_{=0} \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta + R \ddot{\theta} \, \vec{u}_\theta + R \dot{\theta} \, \underbrace{\dot{\vec{u}}_\theta}_{= -\dot{\theta} \vec{u}_r}$

$\boxed{\vec{a} = R \ddot{\theta} \, \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \, \vec{u}_r}$ 0.5 point